21/01/16

Υπενθύμιση: $A \in F^{\nu \times \mu}$, $A \neq 0_{\nu \times \mu}$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Ερώτημα: Είναι $d =$ βαθμίδα(A);

Λύση: α) Αν $d > \min\{\mu, \nu\}$ αποκλείεται γιατί βαθμίδα$(A) \leq \nu$ και βαθμίδα$(A) \leq \mu$

β) Αν $d = \min\{\nu, \mu\}$ τότε βαθμίδα$(A) = d$ αν και μόνο αν υπάρχει $d \times d$ υποπίνακας B του A με $\det B \neq 0_F$.

γ) Αν $d < \min\{\nu, \mu\}$ τότε βαθμίδα$(A) = \mu$ αν και μόνο αν ισχύει ταυτόχρονα. Υπάρχει $d \times d$ υποπίνακας B του A με $\det B \neq 0$ και κάθε $d+1 \cdot x+1$ υποπίνακας του A έχει ορίζουσα 0_F.

Φροντιστηριακές Ασκήσεις #7-8

Άσκηση 1

Από θεωρία πρέπει:

i) ο A να έχει 2×2 υποπίνακα αντιστρέψιμο (δηλ. με ορίζουσα $\neq 0$)

ii) Κάθε 3×3 υποπίνακας του A έχει ορίζουσα $= 0_{\mathbb{R}}$

Εξετάζουμε την ii) Ο A έχει 4 3×3 υποπίνακες (που προκύπτουν από το A αφαιρώντας την 1η ή 2η ή 3η ή 4η στήλη (αντίστοιχα). Υπολογίζουμε:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 3 & b \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2\alpha - 3, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha+2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \alpha^2 - 14\alpha + 24 = (\alpha-12)(\alpha-2)$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha+2 \\ \alpha & b & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \underbrace{-\alpha^2 - 2\alpha + 8b}_{=F_3}, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha+2 \\ 3 & b & 0 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \underbrace{-\alpha b - 3\alpha + 14b - 6}_{=F_4}$$

Άρα πρέπει
$$\begin{cases} 2a-b-3=0 & (1) \\ (a-12)(\alpha-2)=0 & (2) \\ F3 \quad =0 & (3) \\ F4 \quad =0 & (4) \end{cases}$$

Συμπέρασμα: Αναγκαστικά για να ικανοποιείται η (2) πρέπει $\alpha=12$ ή $\alpha=2$ και τότε για να ικανοποιείται η (1) πρέπει $(\alpha,b)=(12,21)$ ή $(\alpha=2,b=1)$
Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $(\alpha,b)=(12,21)$ ή $(\alpha=2,b=1)$
οι (3) και (4) ικανοποιούνται. Άρα η (ii) ικανοποιείται $\Leftrightarrow$ $(\alpha=12, b=21)$ ή $(\alpha=2, b=1)$

• Περίπτωση 1
Βλέπουμε ότι για $(\alpha=12, b=21)$ ικανοποιείται και η i. Ισχύει γιατί $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ δηλ. $\exists$ 2×2 υποπίνακας του A αντιστρέψιμος

• Περίπτωση 2
Βλέπουμε για τον ίδιο λόγο ότι και $(\alpha=2, b=1)$, δηλ. $\exists$ 2×2 υποπίνακας του A αντιστρέψιμος

Συμπέρασμα: βαθμίδα$(A)=2 \Leftrightarrow (a=12, b=21)$ ή $(\alpha=2, b=1)$

Ύλη: Πίνακες (3 πράξεις), αντιστρέψιμοι πίνακες, γραμμοπράξεις, απαλοιφή Gauss $\Leftrightarrow$ αντιστοίχιση με πολλ. από αριστερά με "στοιχειώδεις πίνακες", Εφαρμογή στην εύρεση αντιστρόφου, Ορίζουσες (τρόποι υπολογισμού), Διανυσματικοί χώροι (όχι αξιώματα), υπόχωροι (έλεγχος αν είναι ή όχι), βαθμίδα πίνακα

Ύλη

Έννοια, χρήσεις κατηγορίες δ.χ. F^n, $F^{\nu \times \mu}$, $F_n[x]$
Γραμμική ανεξαρτησία ή εξάρτηση, $\langle v_1 \dots v_n \rangle \subseteq$ υπόχωρος
Παραγόμενος (γραμμικοί συνδυασμοί, βάση, διάσταση

$F^n \to (e_1=(1,0,0,\dots 0), e_2=(0,1,0\dots 0), \dots)$ διάσταση n
$F^{n \times \mu} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & \end{bmatrix}, \dots$ $1, x, x^2, x^n$

$F_n[x] \to 1, x, x^2, \dots x^n$ διάσταση n+1
Επίσης αν V,W υπόχωροι $\Rightarrow$ W+V, V∩W υπόχωροι
$\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$
Υπολογισμός βάσης W+V, W∩W, "ευθύ άθροισμα υπόχωρων, ευθύ συμπλήρωμα" γραμμικές απεικονίσεις,
Έλεγχος ~~αν είναι γραμμική~~, υπολογισμός πυρήνα, εικόνα
γραμ. (πίνακας γραμ. απεικ. ως προς βάσεις)

Άσκηση 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

Χώρος γραμμών του A. Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τις γραμμές του A, δηλαδή
$V = \langle (1,2,0,3), (2,3,1,0), (4,7,1,6) \rangle$
Χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος W του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A. Δηλαδή

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Υπενθ. Από θεωρία $\dim V = \dim W =$ βαθμίδα(A)

Εύρεσης βάσης W

Βήμα 1ο: $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$

Βήμα 2ο: $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = 1e_1+2e_2+4e_3$

$\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix} = 2\cdot e_1+3\cdot e_3+7\cdot e_3$

$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = 0\cdot e_1+1\cdot e_2+1\cdot e_3$

$\begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix} = 3\cdot e_1+0\cdot e_2+6\cdot e_3$

Θέτουμε

$$B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Γραμμοπράξεις

$r_4 \to r_4-3r_1$

$$B \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -6 & 6\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\to -r_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -6 & -6\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}$$

$$\ldots \xrightarrow{r_4\to r_4+6r_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ κλιμακωτός

Φροντ. ασκήσεις #6

Άσκηση 7

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική

$T(1,0,0)=(1,1,0)$

$T(1,1,0)=(0,3,1)$

$T(1,1,1)=(0,4,-1)$

Επειδή η T γραμμική και $g_1=(1,0,0)$, $g_2=(1,1,0)$, $g_3=(1,1,1)$ βάση του $\mathbb{R}^3$ (γιατί $\det\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=1\neq 0$)

η T είναι καλά ορισμένη και πλήρως ορισμένη σαν συνάρτηση $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

α) Υπολογισμός $T(x,y,z)$

Έστω $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Αφού g_1,g_2,g_3 βάση του $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ ώστε $(x,y,z)=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3$ και (αφού T γραμμ.)

$T(x,y,z)=T(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3)=\lambda_1 T(g_1)+\lambda_2 T(g_2)+\lambda_3 T(g_3)$

$=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,3,1)+\lambda_3(0,4,-1)=(\lambda_1,\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3,\lambda_2-\lambda_3)$ *

Δεν τελειώσαμε ! Ποια είναι τα $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$;

Απάντηση

Από ** $(x,y,z)=\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,1,1) \iff$

$(x,y,z)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_3)$

$$\iff \begin{cases} x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ y=\lambda_2+\lambda_3\\ z=\lambda_3\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_3=z \quad (***)\\ \lambda_2=y-\lambda_3=y-z\\ \lambda_1=x-\lambda_2-\lambda_3=x-y+z-z=x-y\end{cases}$$

Συνδυάζοντας (*) με (***) άρα $T(x,y,z)=(x-y, \dots)$

γ) $\alpha = (g_1, g_2, g_3)$

$T(g_1) = T(1,0,0) = (1,1,0) = g_2 = 0 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + 0 \cdot g_3$

$T(g_2) = T(1,1,0) = (0,3,1)$

Έστω $(0,3,1) = \tilde{\lambda}_1 g_1 + \tilde{\lambda}_2 g_2 + \tilde{\lambda}_3 g_3$

Βρίσκουμε $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ λύνοντας 3×3 γραμμ. συστήματα

$T(g_3) = T(1,1,1 = (0,4,-1)$

Έστω $(0,4,-1) = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3$

Βρίσκουμε μ_1, μ_2, μ_3 λύνοντας 3×3 γραμμ. συστήματα

$(0,3,1) = -3g_1 + 2g_2 + g_3$

$(0,4,-1) = -4g_1 + 5g_2 - g_3$

Άρα $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$